1 Cenni di teoria degli insiemi

1.1. Siano $A, B, C, \dots$ insiemi.

Scriveremo $a \in A$, $a \notin A$ per affermare rispettivamente che l'elemento a appartiene all'insieme A e che l'elemento a non appartiene ad A .

Diremo che B è sottoinsieme di A e scriveremo $B \subset A$ se ogni elemento di B è anche elemento di A , cioè se

$$\forall b \in B \implies b \in A.$$

Pertanto

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Per affermare che $B \subset A$ e $A \neq B$, cioè se

$$\forall b \in B \implies b \in A \text{ e } \exists a \in A : a \notin B,$$

scriveremo $B \subsetneq A$ e diremo che B è sottoinsieme proprio di A .

Chiameremo insieme vuoto ϕ l'insieme privo di elementi che per definizione è sottoinsieme di ogni insieme.

Un insieme si indica elencando i suoi elementi:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

o mettendo in evidenza la proprietà comune ai suoi elementi:

$$A = \{a \in A : a \text{ soddisfa alla proprietà } P\}$$

1.2. Siano $A, B, C, \dots \subset S$ chiamiamo intersezione, unione, differenza degli insiemi A e B e complementare di A in S rispettivamente gli insiemi:

$$A \cap B = \{s \in S : s \in A \text{ e } s \in B\};$$

$$A \cup B = \{s \in S : s \in A \text{ o } s \in B\};$$

$$A - B = \{s \in S : s \in A \text{ e } s \notin B\}.$$

$$\mathcal{C}_S A = S - A.$$

Due insiemi A e B tali che $A \cap B = \phi$ si dicono disgiunti.

1.3. Siano A e B due insiemi, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ si dice prodotto cartesiano di A e B e si indica $A \times B$. Indicheremo con A^2 l'insieme $A \times A$.

La nozione di prodotto cartesiano si estende al caso di $n \geq 3$ fattori. Gli elementi di $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ sono le n -uple ordinate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ con $a_i \in A_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Indicheremo con A^n il prodotto cartesiano $A \times A \times \dots \times A$ di A n volte.

2 Funzioni

Definizione 2.1. Una funzione $f : A \rightarrow B$ dell'insieme A nell'insieme B è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento $b \in B$. Scriveremo $b = f(a)$ e diremo che b è immagine di a mediante f e chiameremo A e B rispettivamente dominio e codominio di f .

Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione di A in B :

Definizione 2.2. Gli insiemi $A, B, Im f = \{b \in B : \exists a \in A : b = f(a)\} \subset B$ si dicono rispettivamente dominio, codominio, immagine di f .

Definizione 2.3. f si dice iniettiva se $\forall x_1 \neq x_2 \in A$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ cioè se elementi diversi di A hanno immagine diverse in B .

Osserviamo che

f è iniettiva $\iff \forall x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Definizione 2.4. f iniettiva e surgettiva si dice bigettiva, o che f è una corrispondenza biunivoca.

Definizione 2.5. Sia $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$ si dice controimmagine o immagine inversa di B' . Chiameremo controimmagine o immagine inversa dell'elemento $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$.

Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione bigettiva di A in B .

Definizione 2.6. La funzione $f^{-1} : B \rightarrow A$ che a $b \in B$ associa $f^{-1}(b)$ si dice inversa di f .

Poichè f è surgettiva $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ ed è un unico elemento di A perchè f è iniettiva.

Definizione 2.7. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ due funzioni tali che $B \subset C$, la funzione da A in D che ad ogni $a \in A$ associa $g(f(a)) \in D$ si chiama funzione composta di f e g e si indica $g \circ f$.

Definizione 2.8. La funzione $i_A : A \rightarrow A$ tale che $i_A(a) = a, \forall a \in A$ si chiama applicazione identica di A .

Se $f : A \rightarrow B$ è bigettiva risulta $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.

Definizione 2.9. Si definisce una operazione nell'insieme A assegnando una funzione $\circ : A \times A \rightarrow A$ che ad ogni $(x, y) \in A^2$ associa $x \circ y \in A$. Una operazione in A soddisfacente la proprietà:

- a) $\forall x, y, z \in A \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ si dice associativa;
- b) $\forall (a, b) \in A^2 \quad a + b = b + a$ si dice commutativa.

3 Spazi vettoriali

Un campo K è un insieme dotato di due operazioni associative e commutative, di solito indicate con i simboli $+$ e $\cdot$, per cui inoltre valgono le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$
- $\exists 0 \in K : \forall a \in K \quad a + 0 = 0 + a = a;$
- $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0;$
- $\exists 1 \in K : \forall a \in K \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
- $\forall a \in K - \{0\} \exists a^{-1} \in K; \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$

Gli elementi di un campo K si dicono scalari.

Lo 0 (elemento neutro della somma) e $-a$ si dicono rispettivamente zero di K e opposto di $a \in K$.

1 (elemento neutro del prodotto) e a^{-1} si dicono rispettivamente unità di K e inverso di $a \in K - \{0\}$.

Esempi 3.1. Con le operazioni di somma e prodotto usuali $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi, mentre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non lo sono.

Esercizio 3.2. a) Lo zero e l'unità di K sono unici.

b) $\forall a \in K, -a$ è unico.

c) $\forall a \in K - \{0\}, a^{-1}$ è unico.

a) Siano 0 e $0'$ zeri di K . Allora

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

Siano 1 e $1'$ unità in K allora

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'.$$

b) Siano $-a$ e b opposti di a . Allora

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b.$$

c) Siano a^{-1} e c inversi di $a \in K - \{0\}$. Allora

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1}(a \cdot c) = (a^{-1} \cdot a)c = 1 \cdot c = c.$$

Definizione 3.3. Uno spazio vettoriale su un campo K è un insieme V su cui è definita una una operazione di somma

$$V \times V \longrightarrow V \quad \text{che} \quad \forall v, w \in V \quad \text{associa} \quad v + w \in V$$

e una operazione di prodotto per elementi di K

$$K \times V \longrightarrow V \quad \text{che} \quad \forall k \in K, \forall v \in V \quad \text{associa} \quad kv \in V$$

soddisfacenti le seguenti proprietà:

- commutatività e associatività della somma, cioè
 $\forall u, v, w \in V \quad u + v = v + u \quad \text{e} \quad u + (v + w) = (u + v) + w;$
- esistenza dell'elemento neutro per la somma, cioè
 $\exists 0_V \in V : \forall v \in V \quad v + 0_V = 0_V + v = v;$
- esistenza dell'opposto per la somma, cioè
 $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0_V;$
- distributività del prodotto per scalari, cioè
 $\forall \lambda \in K \forall u, v \in V \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \text{e}$
 $\forall \lambda, \mu \in K \forall v \in V \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v;$
- associatività del prodotto per scalari, cioè
 $\forall \lambda, \mu \in K \forall v \in V \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v);$
- $\forall v \in V \quad 1v = v.$

Gli elementi di uno spazio vettoriale $V = V_K$ sul campo K si dicono vettori.

Esempi 3.4. $\mathbb{R}^2$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con la somma e il prodotto per un numero reale così definiti:

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Più in generale, per ogni intero positivo n , si rende K^n spazio vettoriale su K definendo

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in K^n$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \quad \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in K^n.$$

Con le operazioni di somma e prodotto usuali $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ rispettivamente, mentre $\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, ma $\mathbb{Q}$ non è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Definizione 3.5. Siano V uno spazio vettoriale sul campo K , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ e $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$. Il vettore

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_r v_r \in V$$

si dice combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_r$ a coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$.

Esempio 3.6. In $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^2$ il vettore $\frac{1}{2}(3, \sqrt{2}) - 1(-2, 3) = (\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - 3) \in \mathbb{R}^2$ è combinazione lineare dei vettori $(3, \sqrt{2}), (-2, 3)$ a coefficienti $\frac{1}{2}, -1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.7. Siano V uno spazio vettoriale su K , 0 e 1 lo zero e l'unità di K . Allora

- a) 0_V è unico.
 - b) $0v = 0_V \forall v \in V$.
 - c) $\lambda 0_v = 0_v \forall \lambda \in K$.
 - d) $-1v = -v \forall v \in V$.
- a) Siano 0_V e $0'_V$ zeri di V . Allora

$$0_V = 0_V + 0'_V = 0'_V.$$

Tenendo conto dell'unicità dello zero di V ,

- b) $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \implies 0v = 0_V$ e
- c) $\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V \implies \lambda 0_V = 0_V$.
- d) $-1v$ è l'opposto di v perchè

$$-1v + v = -1v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0_V.$$